Olimpiada de matematică
Etapa județeană a municipiului București – 8.05.2004

Clasa a VI-a

Subiectul 1

Să se arate că numărul:

$N = \frac{8000}{19} \cdot \left(\frac{1}{1+2+3+.....+100} + \frac{1}{1+2+3+.....+101} + \frac{1}{1+2+3+.............+1999} \right)$ este cub perfect.

Rozica Ştefan, Bucureşti

Subiectul 2

Se dau mulțimile A şi B care îndeplinesc simultan condițiile:

a) elementele mulțimii A şi respectiv mulțimii B sunt numere întregi consecutive
b) produsul elementelor mulțimii $A \cap B$ este egal cu -2184
c) card A = card B = n, cu n $\in$ **N**.

Demonstrați că suma elementelor mulțimii $A \cup B$ este un număr divizibil cu 13 pentru:

1) n = 2004
2) n $\geq$ 3

Petre Simion, Bucureşti

Subiectul 3

Fie ABC un triunghi echilateral, $M \in [AB$, $N \in [BC$, $P \in [CA$ astfel încât $(AM) \equiv (BN) \equiv (CP)$. Demonstrați că:

a) triunghiul MNP este echilateral
b) înălțimile triunghiurilor ABC şi MNP sunt concurente.

Petre Simion, Bucureşti

Subiectul 4

Se consideră două submulțimi A şi B ale mulțimii $\{1,2,3,............,2003\}$ cu card A = a şi card B = b, astfel încât a + b $\geq$ 2004.

a) fie $C = \{x - n \mid n \in A\}$ unde $x \in \mathbf{Z}$ fixat. Să se determine card C.
b) să se arate că există $p \in A$ şi $q \in B$ astfel încât $p + q = 2004$.

Daniela Chiteş, Bucureşti